2014年　東大数学　文系第3問 ②　(解の配置)

$\boxed{\text{解法4}}$ 解の配置

パラメータで降べきの順で並べて、
パラメータが解を少なくとも1つ持つ条件をもとめる。

pとqの2文字があるが、Ⓐ両方残す、Ⓑpを残す
Ⓒ qを残す の3つから選択。(今回はⒸは割愛)

(解法A)

③ のグラフが、解法3 の線分と交点を持てばよい。

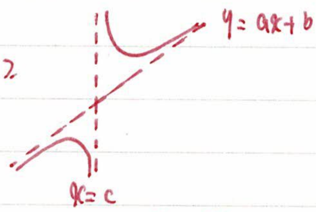
③ $\Leftrightarrow$ $q = \dfrac{3s-\sqrt{3}t}{p-s} - p + 3$

これは、$y = \dfrac{d}{x-c} + ax + b$ のグラフで、

数Ⅲ の範囲で描ける。

$y = \dfrac{d}{x}$ をx軸方向に $+c$ 動かした反比例のグラフ と、$y = ax+b$ の直線 の和

例えば
こんなグラフ



これと、解法3 のグラフと交点を持つ条件は、とても複雑なので、ここで断念。

(解法B)

qを消去し、pを残すので、解法1 を利用。

pの範囲は、$0 \leqq p \leqq 2$。

③ $\Leftrightarrow$ $2p^2 - 2(s+3)p + 3s + \sqrt{3}t = 0$

$f(p) = 2p^2 - 2(s+3)p + 3s + \sqrt{3}t$ とおく。

軸の方程式は $p = \dfrac{s+3}{2}$

Q 次に、$0 \leqq p \leqq 2$ と $q \leqq s \leqq p$ から pについて検討する範囲をもとめる。⑤

$\boxed{\text{解法a}}$ 式で計算

$q = p-3$を $q \leqq s \leqq p$ に代入して、$p-3 \leqq s \leqq p$

$\Leftrightarrow$ $s \leqq p \leqq s+3$

なので、

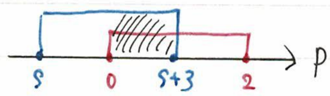
$0 \leqq p \leqq 2$ かつ $s \leqq p \leqq s+3$ で場合分けをする。

(i)

右図のように、

$0 \leqq s+3 \leqq 2 \Leftrightarrow -3 \leqq s \leqq -1$

のとき、



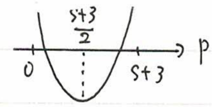
$0 \leqq p \leqq s+3$ である。

軸：$p = \dfrac{s+3}{2}$ なので、ちょうど中央に軸がある。

よって、$0 \leqq p \leqq s+3$に解を持つ条件は、

$f(0) \geqq 0$ かつ $f\left(\dfrac{s+3}{2}\right) \leqq 0$ (i)の結論

(または、$f(s+3) \geqq 0$ かつ $f\left(\dfrac{s+3}{2}\right) \leqq 0$ でも可)



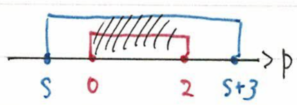
(ii)

右図のように、

$s \leqq 0$ かつ $2 \leqq s+3$

$\Leftrightarrow$ $-1 \leqq s \leqq 0$ のとき、

$0 \leqq p \leqq 2$ である。

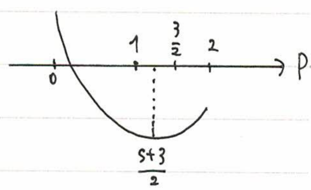


軸の位置は $\dfrac{-1+3}{2} \leqq \dfrac{s+3}{2} \leqq \dfrac{0+3}{2}$ $\Leftrightarrow$ $1 \leqq \dfrac{s+3}{2} \leqq \dfrac{3}{2}$ なので、

$0 \leqq p \leqq 2$に解を持つ条件は、

$f(0) \geqq 0$ かつ $f\left(\dfrac{s+3}{2}\right) \leqq 0$

(ii)の結論

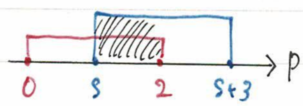


(iii)

右図のように、

$0 \leqq s \leqq 2$ のとき、

$s \leqq p \leqq 2$ である。



軸の位置は、$\dfrac{0+3}{2} \leqq \dfrac{s+3}{2} \leqq \dfrac{2+3}{2}$ $\Leftrightarrow$ $1 \leqq \dfrac{s+3}{2} \leqq \dfrac{5}{2}$

$0 \leqq p \leqq 2$ の範囲の内と外があるので、さらに場合分け

(iii-1) $\dfrac{s+3}{2} \leqq 2 \Leftrightarrow s \leqq 1$ かつ $0 \leqq s \leqq 2$

つまり $0 \leqq s \leqq 1$ の場合、と、

(iii-2) $2 \leqq \dfrac{s+3}{2} \leqq \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 1 \leqq s \leqq 2$ かつ $0 \leqq s \leqq 2$

つまり $1 \leqq s \leqq 2$ の場合にわける。